COINTER PDVL 2023
X CONGRESSO INTERNACIONAL DAS LICENCIATURAS
Edição Presencial Recife (PE)| 29, 30 de nov a 1 de dez
ISSN: 2358-9728 | PREFIXO DOI: 10.31692/2358-9728

DESMISTIFICANDO AS FUNÇÕES HIPERBÓLICAS

FUNCIONES HIPERBÓLICAS DESMITIFICADAS

DEMYSTIFYING HYPERBOLIC FUNCTIONS

Apresentação: Pôster

Kayky da Silva Rocha de Oliveira[1]; Msc. Francismar Holanda[2]

INTRODUÇÃO

O presente estudo tem como objetivo abordar sobre as funções seno e cosseno hiperbólicos e sua existência. Para o desenvolvimento deste trabalho utilizaremos os conceitos e definições de funções hiperbólicas.

É certo que as funções hiperbólicas não são aprofundadas dentro da graduação(licenciatura), pois muitas das vezes nos é apresentado somente suas definições, como elas são determinadas e suas aplicações, sem nenhum tipo de demonstração de sua origem, apenas suas equações prontas.

Na apresentação dos gráficos da função cosseno hiperbólico (Catenária) e da função polinomial do segundo grau (Parábola), observa-se uma diferença entre os mesmos, fato que causa uma certa confusão entre eles no mundo real. Mostraremos alguns exemplos de como esses gráficos estão inseridos na realidade e como podemos diferenciá-los utilizando os conceitos matemáticos.

FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Conforme Cury e Bazzo (2001) em relação a posição do docente sobre alguns conteúdos de matemática:

> Muitas vezes, suas atuações nos cursos de licenciatura ou nas engenharias vêm, ainda, matizadas pela posição elitista dessa ciência, que faz com que considerem “perda de tempo” discutir quaisquer assuntos que fujam da apresentação “burocrática” dos conteúdos programáticos.

Cury e Bazzo afirmam ainda que:

> Para exemplificar este ponto, vamos discutir um item do conteúdo de Cálculo Diferencial e Integral, funções hiperbólicas, em geral apresentadas em livros-texto dessa disciplina. Na determinação das derivadas, inversas e derivadas das inversas dessas funções há muitos cálculos, de que os alunos reclamam. Muitos professores, então,

1 Licenciatura em Matemática, Instituto Federal do Piauí, kaykyrocha2022@gmail.com
2 Msc. Francismar Holanda, Instituto Federal do Piauí, frholanda@ifpi.edu.br

> eliminam esse item do programa, com a desculpa de que somente os engenheiros eletricistas vão trabalhar com a curva denominada “catenária”

Não é difícil observar o que Cury e Bazzo afirmam, basta analisar alguns livros da graduação (licenciatura), onde são apresentadas somente as definições sem nenhuma demonstração. Com isso, é notória a necessidade de analisar-se como estas abordagens estão sendo feitas nos cursos de licenciatura, a fim de desmistificar uma visão reduzida das aplicações de funções hiperbólicas trazendo outros exemplos de suas aplicações, ampliando assim as perspectivas dos discentes acerca do conteúdo, de modo a instiga-los a buscar a compreensão de maneira correta e completa do mesmo.

METODOLOGIA

O presente trabalho é uma pesquisa bibliográfica que trata sobre funções hiperbólicas (seno e cosseno). Foram pesquisados em livros de cálculo e foram observados como este conteúdo é tratado com certa superficialidade, no tocante a demonstração da definição.

A exemplo o livro “Cálculo das funções de uma variável” de Geraldo Ávila que apresenta somente as seguintes informações:

7.3 As funções hiperbólicas

As funções hiperbólicas — *seno hiperbólico, co-seno hiperbólico, tangente hiperbólica* e *co-tangente hiperbólica* — designadas pelos símbolos senh, cosh, tanh e coth, respectivamente, são assim definidas:

$$\begin{aligned} \operatorname{senh} x &= \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \\ \tanh x &= \frac{\operatorname{senh} x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}, \\ \coth x &= \frac{\cosh x}{\operatorname{senh} x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}. \end{aligned} \tag{7.25}$$

Figura 1: Definições das funções seno e cosseno hiperbólicos.
Fonte: Cálculo das funções de uma variável, pág. 166.

As informações acima mostram apenas as definições destas funções, sem sequer mostrar o porquê de as mesmas serem definidas desta maneira. Com isso utilizaremos as séries de Taylor e Maclaurin para provar as definições acima.

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$$

Figura 2: Função e^x escrita na forma de polinômio através das séries de Taylor e Maclaurin.
Fonte: Própria, 2023.

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{(-1)^n x^n}{n!}$$

Figura 3: Função e^{-x} escrita na forma polinomial através das séries de Taylor e Maclaurin.
Fonte: Própria, 2023.

Por conveniência, dividiremos ambas as funções por 2.

$$(1)\quad \frac{e^x}{2} = \frac{1}{2} + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{2\cdot 2!} + \frac{x^3}{2\cdot 3!} + \frac{x^4}{2\cdot 4!} + \frac{x^5}{2\cdot 5!} + \cdots + \frac{x^n}{2\cdot n!}$$

$$(2)\quad \frac{e^{-x}}{2} = \frac{1}{2} - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{2\cdot 2!} - \frac{x^3}{2\cdot 3!} + \frac{x^4}{2\cdot 4!} - \frac{x^5}{2\cdot 5!} + \cdots + \frac{(-1)^n x^n}{2\cdot n!}$$

Figura 4: Função e^x e e^{-x}, ambas divididas por 2.
Fonte: Própria, 2023.

Para obtermos a função seno hiperbólico(senh(x)), é necessário que seja feito a diferença entre (1) e (2), como descrito abaixo:

$$\Rightarrow \frac{e^x}{2} - \frac{e^{-x}}{2} = \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right] + \left[\frac{x}{2} - \left(-\frac{x}{2}\right)\right] + \left[\frac{x^2}{2\cdot 2!} - \frac{x^2}{2\cdot 2!}\right] + \left[\frac{x^3}{2\cdot 3!} - \left(-\frac{x^3}{2\cdot 3!}\right)\right] + \left[\frac{x^4}{2\cdot 4!} - \frac{x^4}{2\cdot 4!}\right] + \left[\frac{x^5}{2\cdot 5!} - \left(-\frac{x^5}{2\cdot 5!}\right)\right] + \cdots + \left[\frac{x^n}{2\cdot n!} - \frac{(-1)^n x^n}{2\cdot n!}\right]$$

$$\Rightarrow \frac{e^x - e^{-x}}{2} = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \Rightarrow \operatorname{senh}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{(2n+1)}}{(2n+1)!}$$

Figura 5: Diferença entre * e ** que resulta na relação senh(x).
Fonte: Própria, 2023.

Analogamente para o cosseno hiperbólico(cosh(x)), basta somar as funções (1) e (2):

$$\Longrightarrow \frac{e^x + e^{-x}}{2} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} \Longrightarrow \cosh(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

Figura 6: Adição de * e ** que resulta na relação cosh(x).
Fonte: Própria, 2023.

Nesta pesquisa também verificamos que pouco se fala sobre os gráficos destas funções, em especial o da função cosseno hiperbólico(catenária), que se assemelha bastante com o gráfico da função quadrática(parábola).

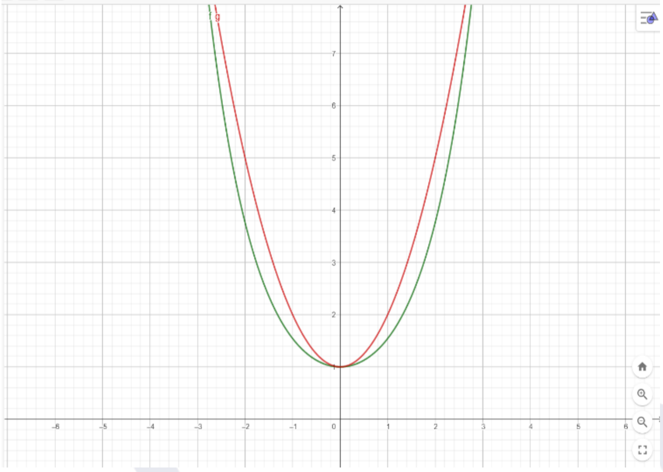

Figura 7: Em verde função cosh(x); em vermelho função f(x)= ax^2+bx+c.
Fonte: Geogebra, (2023).

A catenária por definição é a curva formada por uma corda suspensa livremente por dois pontos sustentada somente pelo seu próprio peso.

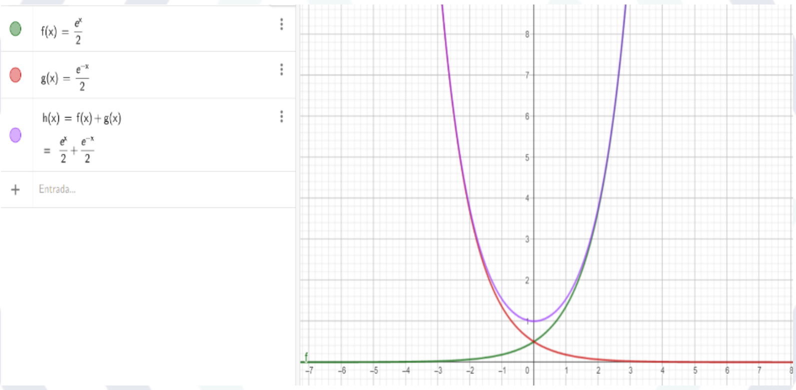

Figura 8: Catenária definida pela função cosh(x).
Fonte: Geogebra (2023).

Figura 9: Gráfico da função senh(x).
Fonte: Geogebra, (2023).

RESULTADOS E DISCUSSÃO

De posse de todas estas informações, foi possível identificar a necessidade de aprofundamento destes conteúdos nos cursos de graduação (licenciaturas), e naqueles que tratam sobre este conteúdo mesmo que superficialmente, por isso mostramos que não basta apenas apresentar suas definições, mas também demonstrá-las de maneira adequada, para que haja total compreensão dos conceitos. E ainda, deve haver exemplificação de como estas funções podem ser vistas e utilizadas no mundo real, não somente na engenharia elétrica como foi citado anteriormente.

Para exemplificar o uso do gráfico, observe a figura 10 onde a catenária está presente no cotidiano e passa despercebido no que diz respeito ao olhar "matemático", uma vez que, ao analisar tais exemplos costuma-se generalizar sempre a uma parábola.

Figura 10: Arco Gateway, St. Louis, USA.
Fonte: <https://es.wikipedia.org/wiki/Arco_Gateway>

CONCLUSÕES

Dado o estudo, o objetivo do trabalho que foi abordar sobre as funções seno e cosseno hiperbólico foi alcançado, também foi possível observar o pouco aprofundamento dos livros de graduação no conteúdo de funções hiperbólicas (seno e cosseno), no que diz respeito às suas devidas demonstrações. Foram observadas suas aplicações no mundo real e como estas funções são determinadas e como devem ser mostradas na graduação, uma vez que, sua presença no cotidiano pode despertar a curiosidade dos acadêmicos.

Diante disso, é recomendado que sejam revistos os conteúdos ministrados na graduação para que haja a inserção do conteúdo apresentado, e que nesta revisão seja proposto a uma abordagem diferente da presente nos livros, enfatizando suas demonstrações e aplicações no cotidiano.

REFERÊNCIAS

CURY, H, N.; BAZZO, W, A. **Formação Crítica em Matemática: uma questão curricular?**. Bolema, Rio Claro - SP, v. 14, n. 16, 2001.

MORAES, L, N. **Funções Trigonométricas Hiperbólicas: teoria, curiosidades e propostas para o trabalho docente.** São Gonçalo, 2021.

ÁVILA, G, S. S., **Cálculo das Funções de Uma Variável. Vol**. 7a edição, LTC, Rio de Janeiro.

STEWART, J. **Cálculo. Vol. I**. 5a edição, Thomson, São Paulo, 2006.

FREITAS, M, B, C, S, B. **As funções hiperbólicas e suas aplicações.** João Pessoa, 2015.

ALHADAS, M, C. **Funções Hiperbólicas no Ensino Médio**. Campos dos Goytacazes, 2013.

BARBOSA, V, D. **Funções Hiperbólicas: uma proposta de ensino**. Jataí, 2021