

**MODELAGEM CINEMÁTICA INVERSA E SIMULAÇÃO DE CONTROLE DE  
MANIPULADORES ROBÓTICOS COM 3 A 5 GRAUS DE LIBERDADE**

**MODELADO CINEMÁTICO INVERSO Y SIMULACIÓN DE CONTROL DE  
MANIPULADORES ROBÓTICOS CON 3 A 5 GRADOS DE LIBERTAD**

**INVERSE KINEMATIC MODELING AND CONTROL SIMULATION OF ROBOTIC  
MANIPULATORS WITH 3 TO 5 DEGREES OF FREEDOM**

Élton Franklin Silva de Lima<sup>1</sup>; Ian Ribeiro Nascimento<sup>2</sup>; Fábio Guilherme de Andrade Soares<sup>3</sup>; Valdenio João Francisco José Lima de Souza<sup>4</sup>; Alexander Patrick Chaves de Sena<sup>5</sup>

DOI: <https://doi.org/10.31692/2596-0857.VIIICOINTERPDVGT.0018>

**RESUMO**

O presente trabalho demonstra o desenvolvimento de um aplicativo que possibilita ao usuário realizar simulações do controle de braços robóticos de 3, 4 e 5 graus de liberdade através da resolução da cinemática inversa. A estratégia implementada para a obtenção do modelo cinemático inverso foi a análise geométrica da estrutura do robô e a análise algébrica da cinemática direta junto a utilização dos conceitos de Denavit-Hartenberg. O aplicativo foi desenvolvido no ambiente App Designer do software Matlab®. As simulações realizadas no aplicativo possibilitam avaliar o desempenho do controle do braço robótico em diversas situações, como tarefas de posicionamento, rastreamento de trajetória e manipulação de objetos. Além disso, os usuários podem inserir os parâmetros do braço robótico, como o número e comprimento dos elos.

**Palavras-chave:** Braço robótico, Cinemática inversa, Cinemática direta, Simulação.

**RESUMEN**

El presente trabajo demuestra el desarrollo de una aplicación que permite al usuario realizar simulaciones del control de brazos robóticos de 3, 4 y 5 grados de libertad mediante la resolución de la cinemática inversa. La estrategia implementada para la obtención del modelo cinemático inverso fue el análisis geométrico de la estructura del robot y el análisis algebraico de la cinemática directa junto con el uso de los conceptos de Denavit-Hartenberg. La aplicación fue desarrollada en el entorno App Designer del software Matlab®. Las simulaciones realizadas en la aplicación permiten evaluar el rendimiento del control del brazo robótico en diversas situaciones, como tareas de posicionamiento, seguimiento de trayectorias y manipulación de objetos. Además, los usuarios pueden introducir los parámetros del brazo robótico, como el número y la longitud de los eslabones.

**Palabras clave:** Brazo robótico, Cinemática inversa, Cinemática directa, Simulación.

1 Bacharelado em Engenharia Mecânica, Instituto Federal de Pernambuco (IFPE), [efsl@discente.ifpe.edu.br](mailto:efsl@discente.ifpe.edu.br)

2 Bacharelado em Engenharia Mecânica, Instituto Federal de Pernambuco (IFPE), [irn@discente.ifpe.edu.br](mailto:irn@discente.ifpe.edu.br)

3 Bacharelado em Engenharia Mecânica, Instituto Federal de Pernambuco (IFPE), [fgas.@discente.ifpe.edu.br](mailto:fgas.@discente.ifpe.edu.br)

4 Bacharelado em Engenharia Mecânica, Instituto Federal de Pernambuco (IFPE), [vjfjls.@discente.edu.br](mailto:vjfjls.@discente.edu.br)

5 Doutor em Engenharia Mecânica, Instituto Federal de Pernambuco (IFPE), [alexander.sena.@caruaru.ifpe.edu.br](mailto:alexander.sena.@caruaru.ifpe.edu.br)

## ABSTRACT

This work demonstrates the development of an application that allows users to perform simulations of the control of robotic arms with 3, 4, and 5 degrees of freedom through inverse kinematics resolution. The strategy implemented to obtain the inverse kinematic model was the geometric analysis of the robot's structure and the algebraic analysis of direct kinematics using Denavit-Hartenberg concepts. The application was developed in the App Designer environment of Matlab® software. The simulations performed in the application allow the evaluation of the robotic arm's control performance in various scenarios, such as positioning tasks, trajectory tracking, and object manipulation. Additionally, users can input the robotic arm's parameters, such as the number and length of the links.

**Keywords:** Robotic arm, Inverse kinematics, Forward kinematics, Simulation.

## INTRODUÇÃO

Um manipulador robótico é composto por uma cadeia serial de membros rígidos (elos) conectados por articulações (juntas), que são movimentados por atuadores, sensores e um sistema de controle eletrônico. O último elo contém o órgão terminal, ou Tool Center Point (TCP), onde são acoplados dispositivos (end-effector) para execução de tarefas (COSTA NETO, 2013).

Os braços robóticos podem ser classificados como cadeias cinemáticas abertas ou fechadas. Nas cadeias abertas, há uma única sequência de elos e juntas conectando a base do robô ao órgão terminal, enquanto as cadeias fechadas apresentam múltiplas possibilidades de conexão.

A cinemática inversa é essencial para a movimentação dos manipuladores robóticos, sendo uma etapa crucial para a realização de qualquer tarefa pelo robô. Por isso, é considerada uma das funções mais importantes no estudo da cinemática de manipuladores robóticos (ZWIRTES, 2004). Para resolver a cinemática, é necessário definir sistemas de coordenadas para representar posições e orientações de corpos rígidos (KATO, 2015). A transformação de coordenadas entre esses sistemas é fundamental para que posições representadas em um sistema possam ser expressas em outro.

Na modelagem pela cinemática direta, o objetivo é determinar a posição e a orientação do órgão terminal com base nas variáveis das juntas, utilizando-se as matrizes de transformação homogênea. O método de Denavit-Hartenberg é amplamente utilizado para simplificar o modelo de manipuladores de cadeia aberta, gerando uma tabela com parâmetros que alimentam as matrizes homogêneas necessárias para calcular posição e orientação (KATO, 2015).

Na cinemática inversa, a posição e orientação do end-effector determinam os ângulos de junta necessários para alcançar a configuração desejada (CRAIG, 2013, p.5). A solução pode ser obtida através de análises geométricas ou da cinemática direta.

O uso da cinemática inversa em simulações é crucial no desenvolvimento de novos

robôs, permitindo avaliar o desempenho de projetos antes da construção física, garantindo que o robô funcione corretamente (ZWIRTES, 2004).

A robótica integra diversas áreas, como engenharia mecânica, elétrica, controle, automação e inteligência artificial, resultando em inovações tecnológicas aplicadas à indústria, saúde e educação (MOL, 2022). O uso de robôs está em crescimento, especialmente na indústria, onde são mais eficientes, rápidos e precisos, além de custarem menos com o tempo. Robôs também executam tarefas perigosas, minimizando riscos ocupacionais (CRAIG, 2013, p.2).

Com o aumento da robótica industrial, é necessário incentivar o estudo dessa ciência, que abrange concepção mecânica, desenvolvimento, controle, aplicação e manutenção de sistemas robóticos (RODRIGUES, 2019).

Este trabalho busca obter a cinemática inversa de três manipuladores com 3, 4 e 5 juntas rotacionais e desenvolver um aplicativo no ambiente App Designer do Matlab<sup>®</sup>, que simula o controle dos braços robóticos. As simulações permitem avaliar o desempenho do controle e experimentar diferentes configurações, ajustando o comprimento dos elos. O objetivo final é desenvolver uma interface amigável para a experimentação do controle baseado na cinemática inversa de manipuladores com 3, 4 e 5 juntas rotacionais.

## **FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA**

### **Arquitetura e Cinemática de Manipuladores Seriados**

Um braço seriado pode ser representado como uma cadeia cinemática aberta de corpos rígidos, elos, conectados por juntas prismáticas ou de revolução. Uma das extremidades da cadeia é fixa em uma base, enquanto que a outra extremidade é livre para se movimentar e, geralmente, possui uma ferramenta, efetuador, para manipular objetos ou realizar tarefas diversas (JUNIOR, 2014).

A mobilidade dos manipuladores seriais está diretamente associada ao número de juntas da sua estrutura (CORDEIRO, 2023). No caso dos robôs seriais, todas as juntas devem ser atuadas para que eles não percam sua sustentação. Sendo assim, é possível considerar no caso dos manipuladores seriais que a mobilidade é igual o número de juntas (CORDEIRO, 2023).

No estudo da robótica de manipuladores, o principal interesse é a localização de objetos no espaço tridimensional. Esses objetos são os elos do manipulador, as peças e ferramentas com as quais lida e outros objetos em seu ambiente (CRAIG, 2013).

O movimento da estrutura do manipulador é obtido pela composição dos movimentos de cada elo em relação ao anterior. Normalmente, deseja-se saber a descrição espacial do

efetuador em relação a um sistema de coordenadas de referência, fixo. Portanto, afim de se manipular objetos no espaço, é necessário descrever a posição e orientação do efetuador. Isso é possível através do estudo da Cinemática (JUNIOR, 2014).

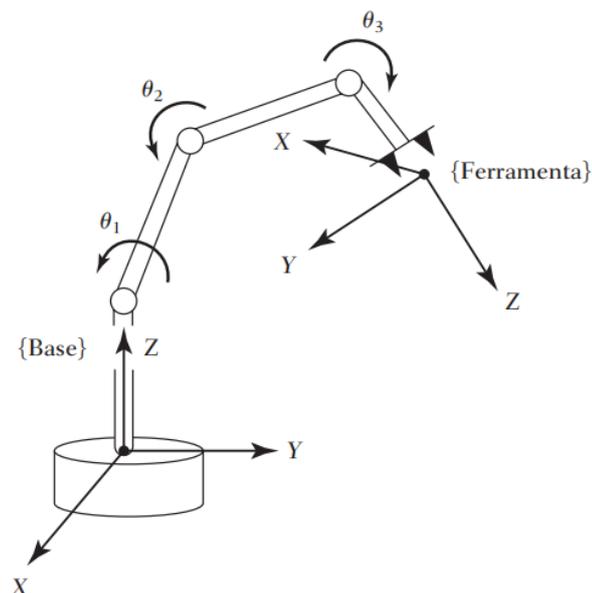
A cinemática é a ciência que trata do movimento sem considerar as forças que o causam. Na ciência da cinemática estudam-se posição, velocidade, aceleração e todas as derivadas de ordem superior das variáveis de posição (com relação ao tempo ou quaisquer outras variáveis). Portanto, o estudo da cinemática dos manipuladores refere-se a todas as propriedades do movimento, tanto geométricas quanto baseadas no tempo (CRAIG, 2013).

Segundo Zvirtes, 2004 o estudo da cinemática é basicamente dividido em dois problemas, o problema da cinemática direta e o da cinemática inversa.

### Cinemática Direta

A cinemática direta trata-se do problema de geometria estática de computar a posição e a orientação do efetuador do manipulador. Em termos específicos, dado um conjunto de ângulos de junta, o problema da cinemática direta é computar a posição e a orientação do sistema de referência da ferramenta, com relação ao sistema da base (CRAIG, 2013). A Figura (1) apresenta a correspondência entre o sistema de referência da ferramenta e o sistema da base de um robô, considerando as variáveis associadas às juntas.

**Figura 1:** Representação o sistema de referência da ferramenta com relação ao sistema da base como uma função das variáveis das juntas.



**Fonte:** Craig (2013).

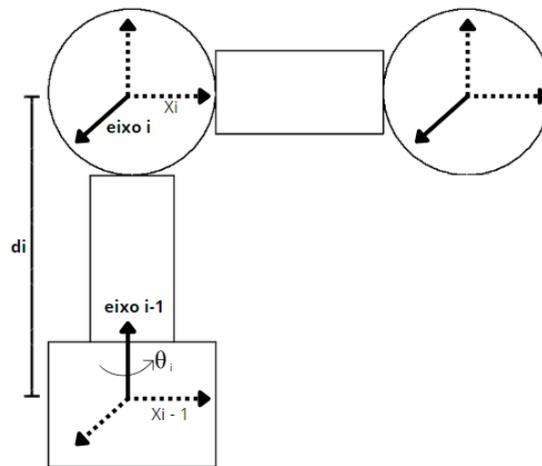
O resultado da cinemática direta provém da equação do braço, para cada tipo de robô, conforme a configuração do mesmo. Para tanto é necessário conhecer os parâmetros

cinemáticos envolvidos em cada elemento do robô. Cada par de elos é conectado por juntas ou de revolução ou prismáticas. A posição relativa e a orientação, destes dois elos sucessivos, podem ser representadas por dois parâmetros de junta (ZWIRTES, 2004).

O primeiro parâmetro de junta é o deslocamento de elo é a distância do ângulo,  $d_i$ , na Figura 2 o  $d_i$  representa a translação ao longo de  $i - 1$  necessária para fazer o eixo  $i - 1$  intersecionar o eixo  $i$ . O deslocamento de elo  $d_i$  será variável se a junta  $i$  for prismática e constante caso for rotacional.

O segundo parâmetro de junta é chamado de ângulo da junta,  $\theta_i$ , que representa a rotação sobre o eixo  $i-1$  necessária para fazer o eixo  $x_{i-1}$  paralelo com o eixo  $x_i$ , esse parâmetro é variável nas juntas rotacionais e constante em juntas prismáticas. A Figura (2) apresenta os parâmetros de juntas de um manipulador robótico, destacando os principais elementos que definem a cinemática do sistema.

**Figura 2:** Representação dos parâmetros de juntas de um manipulador robótico.

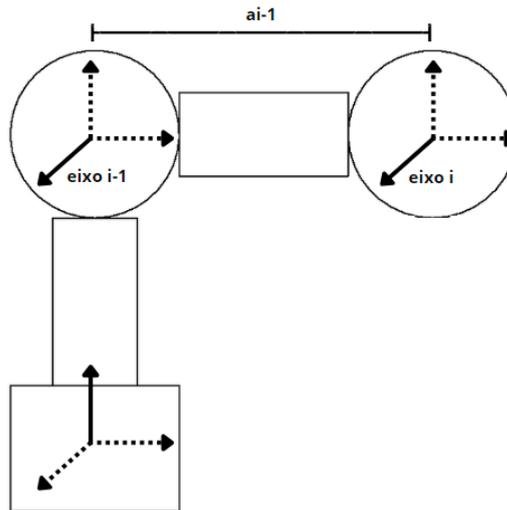


**Fonte:** Autoria própria.

Assim como há uma junta conectando elos adjacentes, há também um elo entre juntas sucessivas. A posição e orientação relativa dos eixos de duas juntas sucessivas podem ser especificadas por dois parâmetros de elos (ZWIRTES, 2004).

O primeiro parâmetro de elo refere-se ao comprimento do elo, representado por  $a_{i-1}$ , sendo a medida da distância ao longo de uma linha de eixos perpendiculares das duas juntas adjacentes de um manipulador. Na Figura (3), é exibido é a distância necessária para a transação do eixo  $i-1$  até o eixo  $i$  ao longo de  $x_{i-1}$ , como sendo a linha perpendicular ao longo da qual é mensurado o comprimento do elo,  $a_{i-1}$ .

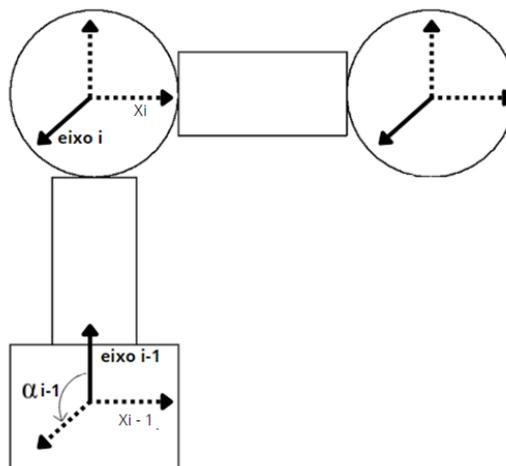
**Figura 3:** Representação do parâmetro comprimento de elo de um manipulador robótico.



**Fonte:** Autoria própria.

O segundo parâmetro necessário para definir a localização relativa de dois eixos chama-se torção do elo. Ele é a rotação sobre  $x_i$  necessária para fazer o eixo  $i - 1$  paralelo com o eixo  $i$ . Através da Figura (4), é possível observar que o ângulo de torção,  $\alpha_{i-1}$  é indicado como o ângulo entre o eixo  $i - 1$  e o eixo  $i$  tendo seu sentido de giro definido pela regra da mão direita.

**Figura 4:** Representação do parâmetro torção de elo de um manipulador robótico.



**Fonte:** Autoria própria.

Desta forma, qualquer robô pode ser descrito cinematicamente atribuindo-se os valores de quatro quantidades para cada elo. Dois descrevem o elo em si e dois descrevem a conexão do elo com um vizinho. No caso usual de uma junta rotacional,  $\theta_i$  é chamada de variável de junta e as outras três quantidades seriam parâmetros fixos de elo. A definição dos mecanismos por meio dessas quantidades é uma convenção chamada de notação de Denavit-Hartenberg (CRAIG, 2013).

## Representação de Denavit-Hartenberg (DH)

Devanit e Hartenberg propuseram uma notação sistemática para atribuir um sistema de coordenadas ortonormal com a regra da mão direita, um para cada elo numa cadeia cinemática aberta de elos (ZWIRTES, 2004). Uma vez que estes sistemas de coordenadas fixados ao elo são atribuídos, transformações entre sistemas de coordenadas adjacentes podem ser representadas por uma simples matriz de transformação de coordenadas homogêneas 4x4 padronizada (ZWIRTES, 2004).

E descrito por Craig, 2013 seis passos para fixar adequadamente sistemas de referência das juntas de mecanismos, são eles:

Identificar os eixos das juntas e imaginar (ou desenhar) linhas infinitas ao longo deles. Para as etapas de 2 a 5, a seguir, considerar duas dessas linhas vizinhas (nos eixos  $i$  e  $i + 1$ );

Identificar a perpendicular comum entre eles, ou ponto de intersecção. Atribuir a origem do sistema de referência do elo ao ponto de intersecção, ou ao ponto onde a perpendicular comum encontra-se com o  $i$ -ésimo eixo;

Definir o eixo  $z_i$  apontando ao longo do  $i$ -ésimo eixo de junta;

Definir o eixo  $x_i$  apontando ao longo da perpendicular comum ou, se os eixos se cruzarem, determinar que  $x_i$  é normal ao plano que contém os dois eixos;

Definir o eixo  $y_i$  para completar um sistema de coordenadas usando a regra da mão direita;

Atribuir  $\{0\}$  para que se equipare a  $\{1\}$  quando a primeira variável de junta for zero. Para  $\{n\}$ , escolher uma localização para a origem e direção  $x_n$  livremente, mas em geral de forma que o máximo possível de parâmetros de acoplamento seja zero.

De acordo com Craig 2013, utilizando forma geral da transformação que relaciona os sistemas de referência fixados a elos vizinhos, apresentada na Equação (1), e concatenando essas transformações individuais, é possível encontrar a posição e a orientação do elo  $n$  com relação ao elo 0.

$${}^{i-1}T_i = \begin{bmatrix} \cos\theta_i & -\text{sen}\theta_i & 0 & a_{i-1} \\ \text{sen}\theta_i \cdot \cos\alpha_{i-1} & \cos\theta_i \cdot \cos\alpha_{i-1} & -\text{sen}\alpha_{i-1} & -\text{sen}\alpha_{i-1} \cdot d_i \\ \text{sen}\theta_i \cdot \text{sen}\alpha_{i-1} & \cos\theta_i \cdot \text{sen}\alpha_{i-1} & \cos\alpha_{i-1} & \cos\alpha_{i-1} \cdot d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1)$$

Portanto, para realizar a transformação do conjunto de coordenadas de 0 até  $n$  necessita-se realizar a multiplicação de todas as matrizes (ZWIRTES, 2004):

$${}^0T_n = {}^0T_1 \cdot {}^1T_2 \dots {}^{n-1}T_n \quad (2)$$

Como resultado às sucessivas multiplicações das matrizes de transformações homogêneas temos uma matriz resultante, que é chamada de equação do braço (ZWIRTES, 2004):

$${}^0T_n = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & p_x \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & p_y \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3)$$

Na Equação (3), a submatriz 3x3 formada pelos vetores unitários  $r_1$ ,  $r_2$  e  $r_3$  representam a orientação do efetuador do manipulador, já a submatriz 3x1 no canto superior direito especifica a posição da ponta do efetuador. Essa transformação,  ${}^0T_n$ , será uma função de todas as  $n$  variáveis de juntas. Se os sensores de posição das juntas do robô forem utilizados, a posição e a orientação cartesianas do último elo podem ser calculadas por  ${}^0T_n$  (CRAIG, 2013).

### Cinemática Inversa

A cinemática inversa é o cálculo realizado para determinar as posições das juntas do manipulador robótico em função da posição e orientação do efetuador final (CORDEIRO, 2003). O problema da cinemática inversa é mais difícil que o problema da cinemática direta, pois não há um procedimento sistemático explícito como o algoritmo DH (SCHILLING, 1990 apud ZWIRTES, 2004).

No entanto, para Zwirtes (2004), a solução para o problema da cinemática inversa é mais útil do que da cinemática direta, pois definindo a posição e orientação do efetuador final é possível seguir caminhos como linhas retas, que possibilitam a realização de diversas atividades como operações de montagem, pintura ou colagem. A cinemática inversa é essencial para modelar um manipulador que movimente-se em função de uma trajetória determinada para o efetuador final (CORDEIRO, 2003)

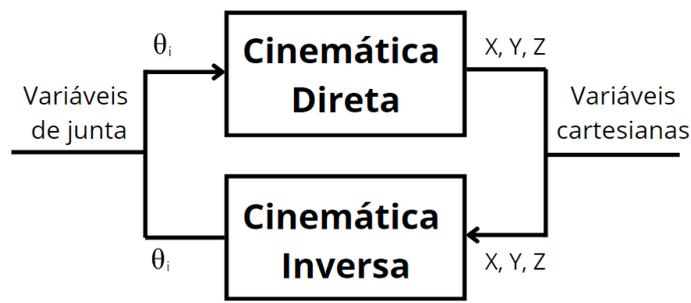
Para Cordeiro (2003), a complexidade na solução da cinemática inversa se dá devido as seguintes situações:

- As equações são, em geral, não lineares e nem sempre podem ser resolvidas com uma forma fechada;
- Não existir uma solução, dependendo da posição do efetuador final desejada e da estrutura do manipulador;
- Existirem múltiplas soluções;
- Existirem infinitas soluções.
- Para a solução do problema da cinemática inversa comumente são utilizados o

método algébrico e o método geométrico. No método geométrico, tenta-se decompor a geometria espacial do manipulador em diversos planos em que se possa utilizar geometria plana (JUNIOR, 2014).

Resolver a cinemática inversa utilizando-se o método algébrico é basicamente realizar manipulações algébricas para encontrar as soluções desejadas (JUNIOR, 2014). A resolução da cinemática inversa através do método algébrico relaciona a cinemática direta com a cinemática inversa. Talvez o mais importante benefício provido pela solução do problema da cinemática direta é que ela se situa como base para a solução do problema da cinemática inversa (ZWIRTES, 2004).

**Figura 5:** Representação da relação da cinemática inversa e direta.



**Fonte:** Autoria própria.

A partir da equação do braço obtida pela cinemática direta é possível realizar as manipulações algébricas para obtenção a cinemática inversa.

## MODELAMENTO DO MANIPULADOR POR CINEMÁTICA INVERSA

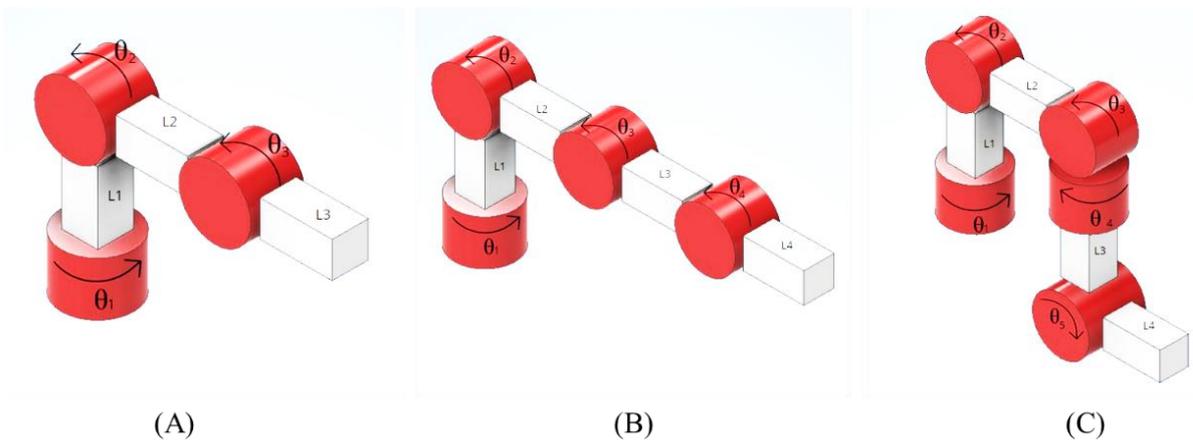
Para fins de apresentação do modelamento matemático, foi escolhido um modelo com 5 graus de liberdade (GDL), sendo importante destacar que os modelos com 3 e 4 graus de liberdade podem ser obtidos como casos simplificados a partir deste modelo de 5 graus.

Para o manipulador robótico de 5 graus de liberdade foi considerado um braço robótico do tipo antropomórfico com todas as juntas do tipo rotacional. Comparando a um braço humano, as juntas 1 e 2 realizam os movimentos do ombro, a junta 3 realiza o movimento do cotovelo, a junta 4 realiza o movimento de rotação do antebraço e a junta 5 realiza o movimento do pulso. O robô possui 5 graus de liberdade e 5 juntas variáveis, todas as juntas são do tipo de revolução, portanto cada uma possui um ângulo  $\theta_i$ , o mecanismo tem 4 elos e cada elo possui um comprimento fixo  $L_i$ .

A Figura (6) apresenta as configurações geométricas de manipuladores robóticos. O arranjo dos sistemas de referência foi disposto conforme apresentado na Figura (7) e na Tabela

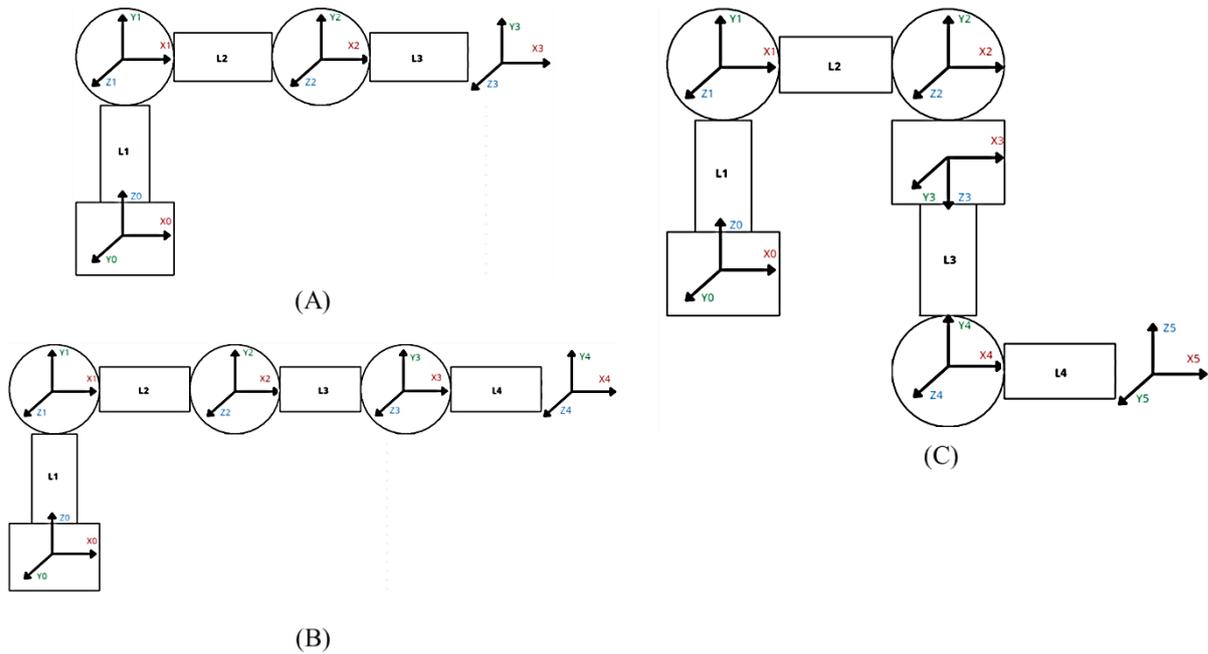
(1) podem ser identificados os parâmetros de elo e junta para o manipulador de 5 GDL.

**Figura 6:** Representações de manipuladores robóticos: a) 3 GDL, b) 4 GDL, c) 5 GDL.



**Fonte:** Autoria própria.

**Figura 7:** Disposição dos sistemas de referência das juntas: a) 3 GDL, b) 4 GDL, c) 5 GDL.



**Fonte:** Autoria própria.

**Tabela 1:** Parâmetros de elo e junta para cada sistema de referência do robô de 5 GDL.

	$\theta_i$	$d_i$	$a_i$	$\alpha_i$
1	$\theta_1$	$L_1$	0	$\pi/2$
2	$\theta_2$	0	$L_2$	0
3	$\theta_3$	0	0	$\pi/2$
4	$\theta_4$	$L_3$	0	$-\pi/2$
5	$\theta_5$	0	$L_4$	$-\pi/2$

**Fonte:** Autoria própria.

Aplicando os parâmetros da Tabela (1) em matrizes de transformações homogêneas e fazendo o produto de 5 matrizes, encontra-se a matriz resultante  ${}^0_5T$ .

$${}^0_5T = {}^0_1T \cdot {}^1_2T \cdot {}^2_3T \cdot {}^3_4T \cdot {}^4_5T \quad (4)$$

Onde a matriz  ${}^0_5T$  fornece a cinemática direta do manipulador de 5 graus de liberdade. Na Equação (5) os vetores  $r^1, r^2$  e  $r^3$  especificam a orientação do efetuador em relação ao sistema de coordenada da base do robô, já os elementos  $p_x, p_y$  e  $p_z$  expressam as coordenadas cartesianas da ponta do efetuador em relação ao sistema de referência da base.

$${}^0_5T = \begin{bmatrix} r_x^1 & r_x^2 & r_x^3 & p_x \\ r_y^1 & r_y^2 & r_y^3 & p_y \\ r_z^1 & r_z^2 & r_z^3 & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5)$$

Considerar cosseno = c e seno = s:

$$r_x^1 = c\theta_5 \cdot (s\theta_1 \cdot s\theta_4 + c\theta_4 \cdot (c\theta_1 \cdot c\theta_2 \cdot c\theta_3 - c\theta_1 \cdot s\theta_2 \cdot s\theta_3)) - s\theta_5 \cdot (c\theta_1 \cdot c\theta_2 \cdot s\theta_3 + c\theta_1 \cdot c\theta_3 \cdot s\theta_2) \quad (6)$$

$$r_y^1 = -c\theta_5 \cdot (c\theta_1 \cdot s\theta_4 + c\theta_4 \cdot (s\theta_1 \cdot s\theta_2 \cdot s\theta_3 - c\theta_2 \cdot c\theta_3 \cdot s\theta_1)) - s\theta_5 \cdot (c\theta_2 \cdot s\theta_1 \cdot s\theta_3 + c\theta_3 \cdot s\theta_1 \cdot s\theta_2) \quad (7)$$

$$r_z^1 = c(\theta_2 + \theta_3) \cdot s\theta_5 + s(\theta_2 + \theta_3) \cdot c\theta_4 \cdot c\theta_5 \quad (8)$$

$$r_x^2 = s\theta_4 \cdot (c\theta_1 \cdot c\theta_2 \cdot c\theta_3 - c\theta_1 \cdot s\theta_2 \cdot s\theta_3) - c\theta_4 \cdot s\theta_1 \quad (9)$$

$$r_y^2 = c\theta_4 \cdot c\theta_1 - s\theta_4 \cdot (s\theta_1 \cdot s\theta_2 \cdot s\theta_3 - c\theta_2 \cdot c\theta_3 \cdot s\theta_1) \quad (10)$$

$$r_z^2 = s(\theta_2 + \theta_3) \cdot s\theta_4 \quad (11)$$

$$r_x^3 = -s\theta_5 \cdot (s\theta_1 \cdot s\theta_4 + c\theta_4 \cdot (c\theta_1 \cdot c\theta_2 \cdot c\theta_3 - c\theta_1 \cdot s\theta_2 \cdot s\theta_3)) - c\theta_5 \cdot (c\theta_1 \cdot c\theta_2 \cdot s\theta_3 + c\theta_1 \cdot c\theta_3 \cdot s\theta_2) \quad (12)$$

$$r_y^3 = s\theta_5 \cdot (c\theta_1 \cdot s\theta_4 + c\theta_4 \cdot (s\theta_1 \cdot s\theta_2 \cdot s\theta_3 - c\theta_2 \cdot c\theta_3 \cdot s\theta_1)) - c\theta_5 \cdot (c\theta_2 \cdot s\theta_1 \cdot s\theta_3 + c\theta_3 \cdot s\theta_1 \cdot s\theta_2) \quad (13)$$

$$r_z^3 = c(\theta_2 + \theta_3) \cdot c\theta_5 - s(\theta_2 + \theta_3) \cdot c\theta_4 \cdot s\theta_5 \quad (14)$$

$$p_x = L_2 \cdot c\theta_1 \cdot c\theta_2 + L_3 \cdot s\theta_1 \cdot s\theta_4 + L_4 \cdot c\theta_5 \cdot (s\theta_1 \cdot s\theta_4 + c\theta_1 \cdot c\theta_2 \cdot c\theta_3 \cdot c\theta_4 - c\theta_1 \cdot c\theta_4 \cdot s\theta_2 \cdot s\theta_3) - L_4 \cdot s(\theta_2 + \theta_3) \cdot c\theta_1 \cdot s\theta_5 + L_3 \cdot c(\theta_2 + \theta_3) \cdot c\theta_1 \cdot c\theta_4 \quad (15)$$

$$p_y = L_2 \cdot c\theta_2 \cdot s\theta_1 - L_3 \cdot c\theta_1 \cdot s\theta_4 - L_4 \cdot c\theta_5 \cdot (c\theta_1 \cdot s\theta_4 - c\theta_2 \cdot c\theta_3 \cdot c\theta_4 \cdot s\theta_1 + c\theta_4 \cdot s\theta_1 \cdot s\theta_2 \cdot s\theta_3) + L_3 \cdot c(\theta_2 + \theta_3) \cdot c\theta_4 \cdot s\theta_1 - L_4 \cdot s(\theta_2 + \theta_3) \cdot s\theta_1 \cdot s\theta_5 \quad (16)$$

$$p_z = L_1 + L_2 \cdot s\theta_2 + \frac{L_4 \cdot c(\theta_4 + \theta_5) \cdot s(\theta_2 + \theta_3)}{2} + L_3 \cdot s(\theta_2 + \theta_3) \cdot c\theta_4 + L_4 \cdot c(\theta_2 + \theta_3) \cdot s\theta_5 + \frac{L_4 \cdot c(\theta_4 - \theta_5) \cdot s(\theta_2 + \theta_3)}{2} \quad (17)$$

A definição da cinemática inversa do manipulador de 5 graus de liberdade proposto é consideravelmente mais complexa se comparado aos outros dois manipuladores apresentados anteriormente, pois neste caso existem múltiplas soluções para uma única coordenada cartesiana  $p_x$ ,  $p_y$  e  $p_z$ .

Portanto se fez necessário fixar a orientação do efetuador em relação a rotação no eixo  $z_0$  e o eixo  $y_0$ , fazendo com que a orientação do eixo do efetuador,  $x_5$ , permaneça a mesma do eixo da base,  $x_0$ , para qualquer coordenada cartesiana, assim restringindo o número de soluções possíveis a um. Nas Equações (18) e (19) são apresentadas as matrizes de rotação para os eixos  $z$  e  $y$  respectivamente.

$$R_z\theta = \begin{bmatrix} \cos(\lambda_z) & -\text{sen}(\lambda_z) & 0 & p_x \\ \text{sen}(\lambda_z) & \cos(\lambda_z) & 0 & p_y \\ 0 & 0 & 1 & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (18)$$

$$R_y\theta = \begin{bmatrix} \cos(\lambda_y) & 0 & \text{sen}(\lambda_y) & p_x \\ 0 & 1 & 0 & p_y \\ -\text{sen}(\lambda_y) & 0 & \cos(\lambda_y) & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (19)$$

#### Junta do Antebraço ( $\theta_4$ )

Para definir a expressão de  $\theta_4$  é possível então igualar os elementos (1, 2) das matrizes apresentadas nas Equações (5) e (18): (considerando seno = s e cosseno = c)

$$r_x^2 = -s(\lambda_z) \quad (20)$$

$$s(\theta_4) \cdot (c(\theta_1) \cdot c(\theta_2) \cdot c(\theta_3) - c(\theta_1) \cdot s(\theta_2) \cdot s(\theta_3)) - s(\theta_1) \cdot c(\theta_4) = -s(\lambda_z) \quad (21)$$

Como não deve existir rotação do efetuador em torno do eixo  $z_0$ , temos que  $\lambda_z = 0$ .

$$s(\theta_4) \cdot (c(\theta_1) \cdot c(\theta_2) \cdot c(\theta_3) - c(\theta_1) \cdot s(\theta_2) \cdot s(\theta_3)) - s(\theta_1) \cdot c(\theta_4) = 0 \quad (22)$$

$$s(\theta_4) \cdot (c(\theta_1) \cdot c(\theta_2) \cdot c(\theta_3) - c(\theta_1) \cdot s(\theta_2) \cdot s(\theta_3)) = s(\theta_1) \cdot c(\theta_4) \quad (23)$$

$$\frac{s(\theta_4)}{c(\theta_4)} = \frac{s(\theta_1)}{c(\theta_1) \cdot c(\theta_2) \cdot c(\theta_3) - c(\theta_1) \cdot s(\theta_2) \cdot s(\theta_3)} \quad (24)$$

$$\theta_4 = \text{atan2}(s(\theta_1), c(\theta_1) \cdot c(\theta_2) \cdot c(\theta_3) - c(\theta_1) \cdot s(\theta_2) \cdot s(\theta_3)) \quad (25)$$

### Junta do Pulso ( $\theta_5$ )

A expressão para  $\theta_5$  pode ser definida de forma similar a secção anterior, igualando os elementos (1, 3) das matrizes apresentadas nas Equações (5) e (19):

$$r_x^3 = s(\lambda_y) \quad (26)$$

$$-s(\theta_5) \cdot (s(\theta_1) \cdot s(\theta_4) + c(\theta_4) \cdot (c(\theta_1) \cdot c(\theta_2) \cdot c(\theta_3) - c(\theta_1) \cdot s(\theta_2) \cdot s(\theta_3))) - c(\theta_5) \cdot (c(\theta_1) \cdot c(\theta_2) \cdot s(\theta_3) + c(\theta_1) \cdot c(\theta_3) \cdot s(\theta_2)) = s(\lambda_y) \quad (27)$$

Não deve existir rotação do efetuador em torno do eixo  $y_0$ , então  $\lambda_y = 0$ .

$$-s(\theta_5) \cdot (s(\theta_1) \cdot s(\theta_4) + c(\theta_4) \cdot (c(\theta_1) \cdot c(\theta_2) \cdot c(\theta_3) - c(\theta_1) \cdot s(\theta_2) \cdot s(\theta_3))) - c(\theta_5) \cdot (c(\theta_1) \cdot c(\theta_2) \cdot s(\theta_3) + c(\theta_1) \cdot c(\theta_3) \cdot s(\theta_2)) = 0 \quad (28)$$

$$s(\theta_5) \cdot (s(\theta_1) \cdot s(\theta_4) + c(\theta_4) \cdot (c(\theta_1) \cdot c(\theta_2) \cdot c(\theta_3) - c(\theta_1) \cdot s(\theta_2) \cdot s(\theta_3))) = -c(\theta_5) \cdot (c(\theta_1) \cdot c(\theta_2) \cdot s(\theta_3) + c(\theta_1) \cdot c(\theta_3) \cdot s(\theta_2)) \quad (29)$$

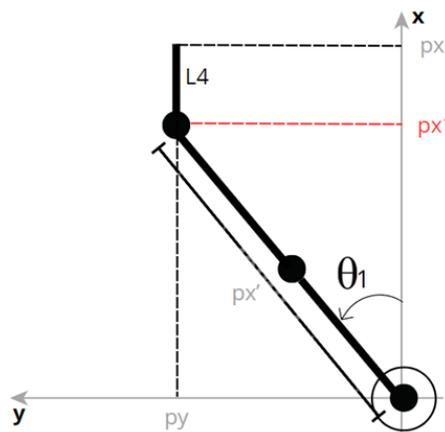
$$\frac{s(\theta_5)}{c(\theta_5)} = \frac{-(c(\theta_1) \cdot c(\theta_2) \cdot s(\theta_3) + c(\theta_1) \cdot c(\theta_3) \cdot s(\theta_2))}{s(\theta_1) \cdot s(\theta_4) + c(\theta_4) \cdot (c(\theta_1) \cdot c(\theta_2) \cdot c(\theta_3) - c(\theta_1) \cdot s(\theta_2) \cdot s(\theta_3))} \quad (30)$$

$$\theta_5 = \text{atan2}(-c(\theta_1) \cdot c(\theta_2) \cdot s(\theta_3) + c(\theta_1) \cdot c(\theta_3) \cdot s(\theta_2), s(\theta_1) \cdot s(\theta_4) + c(\theta_4) \cdot (c(\theta_1) \cdot c(\theta_2) \cdot c(\theta_3) - c(\theta_1) \cdot s(\theta_2) \cdot s(\theta_3))) \quad (31)$$

### Junta do Ombro ( $\theta_1$ )

Com a orientação do efetuador definida é possível obter a expressão para  $\theta_1$  através da abordagem geométrica, decompondo a geometria espacial do manipulador no plano (y, x).

**Figura 8:** Decomposição do manipulador de 5 graus de liberdade no plano (y, x)..



**Fonte:** Autoria própria.

Analisando a Figura (8) é possível deduzir que:

$$\tan(\theta_1) = \frac{p_y}{p_{x1}} \quad (32)$$

$$p_{x1} = p_x - L_4 \quad (33)$$

Substituindo  $p_{x1}$  na Equação (32):

$$\tan(\theta_1) = \frac{p_y}{p_x - L_4} \quad (34)$$

$$\theta_1 = \text{atan2}(p_y, p_x - L_4) \quad (35)$$

### Junta do Ombro ( $\theta_2$ )

A expressão para o ângulo da junta 2 do manipulador de 5 graus de liberdade:

$$\theta_2 = \text{atan2} \left( (p_z - L_4 \cdot \text{sen}(\lambda) - L_1), -\frac{p_x - L_4 \cdot \text{cos}(\lambda)}{\text{cos}(\theta_1)} \right) \pm \text{arcos} \left( \frac{\left( \frac{p_x - L_4 \cdot \text{cos}(\lambda)}{\text{cos}(\theta_1)} \right)^2 + (p_z - L_4 \cdot \text{sen}(\lambda) - L_1)^2 + L_2^2 - L_3^2}{2 \cdot L_2 \cdot \sqrt{\left( \frac{p_x - L_4 \cdot \text{cos}(\lambda)}{\text{cos}(\theta_1)} \right)^2 + (p_z - L_4 \cdot \text{sen}(\lambda) - L_1)^2}} \right) \quad (36)$$

No caso do manipulador de 5 graus de liberdade a orientação do eixo  $x_5$  do sistema de coordenada do efetuador foi definido com a mesma orientação do eixo  $x_0$  do sistema de coordenada da base, logo  $\lambda = 0$ . Substituindo  $\lambda$  na Equação (37):

$$\theta_2 = \text{atan2} \left( (p_z - L_1), -\frac{p_x - L_4}{\text{cos}(\theta_1)} \right) \pm \text{arcos} \left( \frac{\left( \frac{p_x - L_4}{\text{cos}(\theta_1)} \right)^2 + (p_z - L_1)^2 + L_2^2 - L_3^2}{2 \cdot L_2 \cdot \sqrt{\left( \frac{p_x - L_4}{\text{cos}(\theta_1)} \right)^2 + (p_z - L_1)^2}} \right) \quad (37)$$

### Junta do Cotovelo ( $\theta_3$ )

A expressão de  $\theta_3$  pode ser escrita da seguinte forma:

$$\theta_3 = \text{arcos} \left( \frac{-\left( \frac{p_x - L_4 \cdot \text{cos}(\lambda)}{\text{cos}(\theta_1)} \right)^2 - (p_z - L_4 \cdot \text{sen}(\lambda) - L_1)^2 + L_2^2 + L_3^2}{2 \cdot L_2 \cdot L_3 \cdot \text{cos}(\theta_1)} \right) - \pi + \frac{\pi}{2} \quad (38)$$

$$\theta_3 = \text{arcos} \left( \frac{-\left( \frac{p_x - L_4 \cdot \text{cos}(\lambda)}{\text{cos}(\theta_1)} \right)^2 - (p_z - L_4 \cdot \text{sen}(\lambda) - L_1)^2 + L_2^2 + L_3^2}{2 \cdot L_2 \cdot L_3 \cdot \text{cos}(\theta_1)} \right) - \frac{\pi}{2} \quad (39)$$

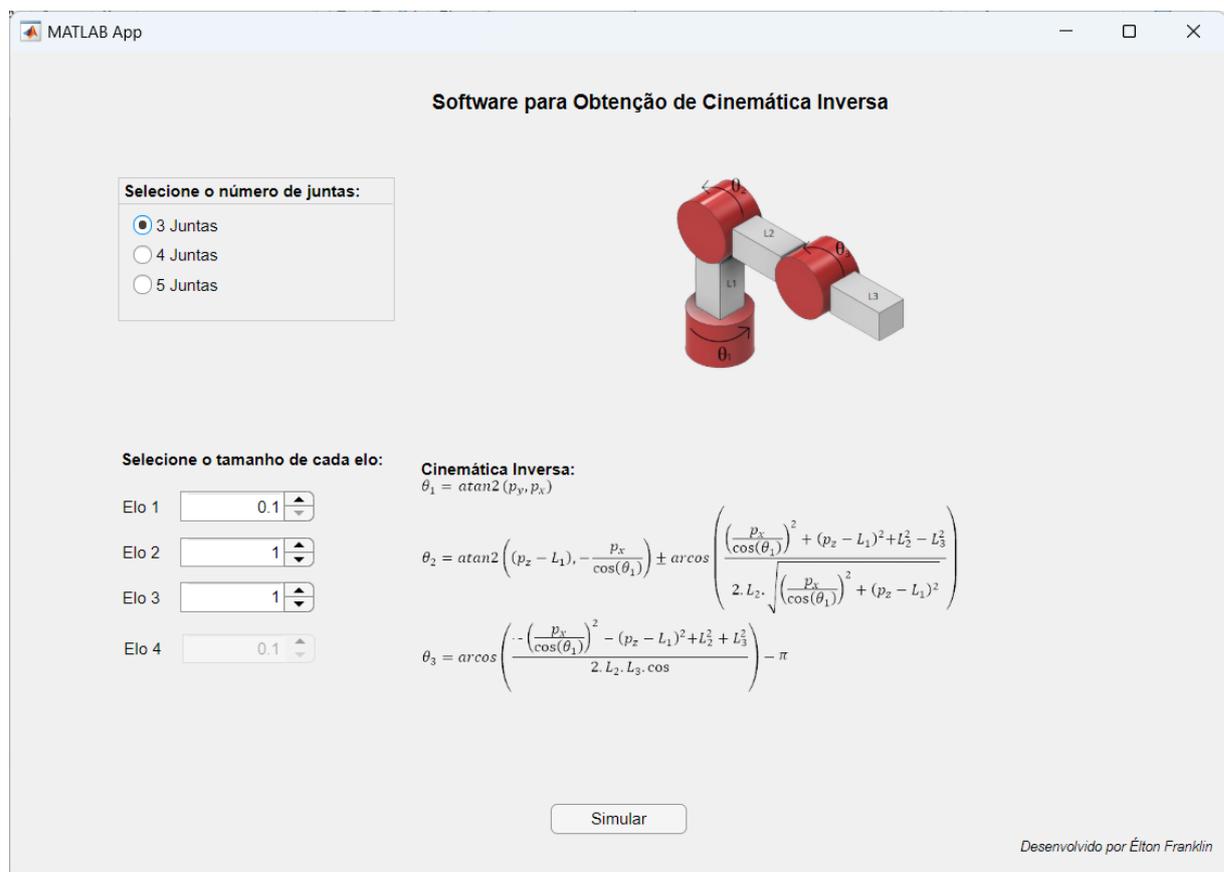
## RESULTADOS E DISCUSSÃO

Com o intuito de validar a cinemática inversa de cada manipulador robótico apresentado no capítulo anterior e viabilizar o estudo de suas trajetórias e desempenho, foi concebido um aplicativo utilizando a plataforma App Designer do software Matlab®.

O Matlab® representa uma plataforma de programação e computação numérica empregada em diversas áreas da ciência e engenharia. Destaca-se pela inclusão do App Designer, um ambiente que simplifica a criação de aplicativos com interfaces gráficas. Além disso, sua capacidade de integração de extensões oferece um vasto leque de novas funções para o desenvolvimento de projetos e pesquisas.

Por esses motivos, optou-se por desenvolver o aplicativo destinado à validação e estudo da cinemática inversa dos manipuladores de 3, 4 e 5 graus de liberdade na plataforma App Designer do software Matlab®. A Figura (9) apresenta a interface do aplicativo projetado para simular a cinemática inversa de manipuladores robóticos

**Figura 9:** Interface do aplicativo desenvolvida para a simulação da cinemática inversa.



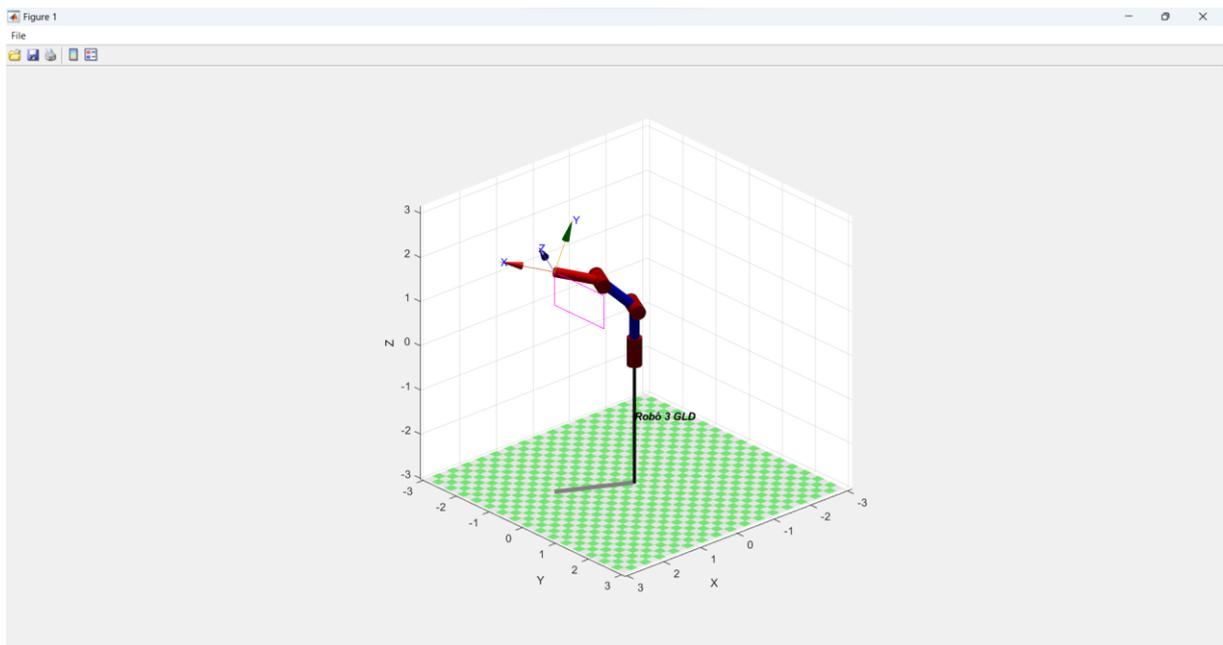
**Fonte:** Autoria própria.

Na Figura 9 é possível observa a interface amigável do aplicativo desenvolvido para a simulação da cinemática inversa, na interface é possível selecionar o número de juntas do

manipulador, que varia de 3 a 5, especificar o tamanho de cada elo, visualizar as expressões da cinemática inversa e o esboço para cada tipo de manipular.

Ao inserir os dados desejados na interface o usuário pode, em seguida, selecionar a opção “Simular”. Isso abrirá uma tela com um ambiente no qual o manipulador especificado desenha quatro linhas, formando um retângulo no espaço tridimensional. A Figura (10) apresenta o ambiente de simulação.

**Figura 10:** Ambiente de simulação 3D do aplicativo.



**Fonte:** Autoria própria.

Para o modelamento 3D do manipulador robótico no ambiente de simulação foi utilizada a extensão ROBOTICS TOOLBOX, disponibilizada por Peter Corke. Esta extensão permite a utilização de diversas ferramentas úteis para o estudo de mecanismos robóticos como geração de trajetória, modelamento 3D de manipuladores, aplicação de modelos cinemáticos entre outras funções.

O desenho das linhas no ambiente de simulação 3D é realizado fornecendo 400 coordenadas cartesianas ( $p_x$ ,  $p_y$  e  $p_z$ ) em relação ao sistema de referência da base do manipulador e são aplicadas as expressões desenvolvidas no capítulo anterior para definir o ângulo de cada uma das juntas.

O tamanho do retângulo desenhado na simulação varia conforme as dimensões dos elos definidos pelo usuário. Por essa razão, após testes realizados, foi decidido estabelecer um limite para os tamanhos dos elos 1 e 4. Estes estão restritos a serem menores ou iguais ao elo de menor valor entre os elos 2 e 3.

A Figura (11) apresenta a estratégia utilizada para gerar as 400 coordenadas cartesianas que são fornecidas as expressões de cada junta para definir os ângulos necessários para o manipulador desenvolver a trajetória que o efetuador do manipulador desenhe um retângulo.

**Figura 11:** Trecho da programação utilizada para fornecer as 400 coordenadas para a trajetória do manipulador no ambiente de simulação.

```
interval = 100;
for t = 1:400

    if (t < interval)
        px = (L1+L2+L3+L4)/2;
        py = ( -(L1+L2+L3)/4);
        pz = ((- ((L1+L2+L3)/4) / interval)*t + ((L1+L2+L3)*2/3));
    elseif (t < 2*interval)
        px = (L1+L2+L3+L4)/2;
        py = (( ((L1+L2+L3)/2) /interval)*t - ((L1+L2+L3)*3/4));
        pz = ((L1+L2+L3)*5/12);
    elseif (t < 3*interval)
        px = (L1+L2+L3+L4)/2;
        py = ((L1+L2+L3)/4);
        pz = (( ((L1+L2+L3)/4) /interval)*t- ((L1+L2+L3)/12));
    elseif (t <= 4*interval)
        px = (L1+L2+L3+L4)/2;
        py = ((- ((L1+L2+L3)/2) /interval)*t + ((L1+L2+L3)*7/4));
        pz = (((L1+L2+L3)*2/3));
    else
        px = 0;
        py = 0;
        pz = 0;
    end
end
```

**Fonte:** Autoria própria.

Por meio da interface e da simulação por ela gerada é possível avaliar visualmente a trajetória do manipulador bem como o desempenho de cinemática inversa desenvolvida neste trabalho, sendo uma ferramenta de grande auxílio para estudo e pesquisa de manipuladores tipo braço robótico antropomórficos.

## CONCLUSÕES

O presente trabalho ofereceu soluções para a cinemática inversa de três braços robóticos antropomórficos, com 3, 4 e 5 graus de liberdade. Para cada manipulador, a resolução da cinemática inversa foi desenvolvida com a abordagem geométrica junta a abordagem algébrica, também foi apresentada a solução cinemática direta para servir como base na resolução da cinemática inversa pela abordagem algébrica.

Um aplicativo foi desenvolvido no ambiente App Designer do Matlab®, fornecendo uma interface amigável que permite ao usuário selecionar o manipulador desejado e definir o

tamanho de cada elo do robô. Este aplicativo viabiliza a simulação da solução da cinemática inversa desenvolvida neste estudo. Além disso, possibilita a análise das trajetórias dos manipuladores propostos e a avaliação comparativa de seu desempenho ao realizar as mesmas tarefas. Essa ferramenta não apenas demonstra a aplicação prática das soluções encontradas, mas também facilita estudos detalhados e avaliações comparativas dos diferentes braços robóticos em diversas situações de trabalho.

Como trabalhos futuros sugere-se o projeto, construção e implementação do controle através da cinemática inversa dos três manipuladores robóticos para permitir melhor desenvolvimento do estudo de manipuladores robóticos. Também é sugerido a integração de novas funções no aplicativo, como a possibilidade do usuário fornecer coordenadas cartesianas para que os manipuladores desenvolvam a trajetória por eles desejada. Outra sugestão é resolução da cinemática inversa de um manipulador robótico tipo braço antropomórfico de 6 graus de liberdade.

## REFERÊNCIAS

- CORDEIRO, J. **Avaliação do Impacto dos Modos de Trabalho de Manipuladores Robóticos em Serie para Resolução de Redundância**. Trabalho de Conclusão de Curso. (Bacharel em Engenharia Mecânica), Universidade Federal de São Carlos, 2023.
- COSTA NETO, E.F. **Desenvolvimento de Método para Projeto Modular de Célula de Manufatura Robotizada com Programação no Nível de Tarefas**. Dissertação (Mestrado). Universidade Federal de Pernambuco. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, 2013.
- CRAIG, J. **Robótica**. 3ª edição. São Paulo: Pearson Education do Brasil, 2012.
- JUNIOR, F. **Estudo e Implementação de Redes Neurais e Algoritmos Genéticos para Resolução de Cinemática Inversa de um Manipulador Robótico com 5 Graus de Liberdade**. Dissertação de Mestrado. (Mestre em Engenharia Elétrica), Universidade Estadual de Campinas, 2014.
- KATO, L.K. **Projeto de um Braço Robótico para Fins Didáticos**. Trabalho de Conclusão de Curso (Engenharia de Controle e Automação). Universidade Federal de Santa Catarina, 2015.
- MÓL, M. **Importância da Robótica Assistiva Para o Auxílio da Humanidade**. Trabalho de Conclusão de Curso. (Bacharel em Engenharia de Controle e Automação), Universidade Federal de Ouro Preto, 2022.
- RODRIGUES, V. **Modelo Cinético de um Manipulador de 6 GDL**. Trabalho de Conclusão de Curso. (Bacharel em Engenharia de Controle e Automação), Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2019.
- ZWIRTES, R. **Cinemática Inversa Para Controle Da Abordagem De Órgãos Terminais De Robôs Manipuladores**. Trabalho de Conclusão de Curso. (Bacharel em Engenharia da Computação), Universidade Estadual de Santa Catarina, 2004.